MCU

Le mouvement circulaire uniforme

Le mouvement curviligne en général

On a vu précédemment qu'on pouvait généraliser la vitesse et l'accélération en terme de vecteur. Sachant qu'un vecteur est caractérisé par une intensité, une direction et un sens, la seule variation de l'une des trois caractéristiques en ce qui concerne le vecteur vitesse produisait un vecteur accélération. On pouvait donc avoir une accélération alors même que la vitesse ne varie pas en intensité (mais bien en sens et/ou en direction) ! Il faut bien comprendre par là que l'accélération ainsi créée est une accélération qui ne modifiera que la direction du vecteur vitesse, et nullement son intensité. Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'au cas où le sens et/ou la direction du vecteur vitesse varie, mais pas son intensité ; c'est ce qu'on appelle l'étude du mouvement curviligne.

Définition :

> Un **mouvement curviligne** est un mouvement au cours duquel l'intensité du vecteur vitesse est conservée, mais où la direction varie.

Un exemple courant est de prendre un virage en voiture tout en roulant à la même vitesse. L'intensité de celle-ci est alors conservée (le compteur indique la même vitesse) mais le sens et la direction varient.
Cependant, dans le cadre de ce cours, nous étudierons plutôt les mobiles en mouvement circulaire uniforme (MCU), c'est-à-dire selon des trajectoires circulaires plutôt que quelconques, ceci afin de simplifier le problème !

Définition, période et vitesse d'un MCU

Définitions :

> - Un objet de masse m décrit un **MCU** de rayon R et de centre C, si, parcourant un cercle, il décrit des arcs égaux de longueur Δs en des durées égales Δt.
> - La durée d'une révolution complète est la période T.

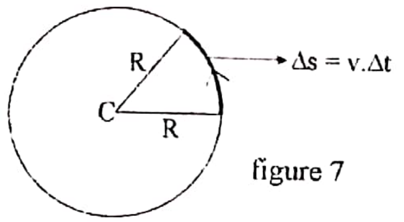


figure 7

Dans le mouvement rectiligne, on a utilisé la lettre « x » pour désigner la position d'un mobile à l'instant t. L'axe des x d'un repère (cartésien) représente donc les abscisses positions.

Dans le mouvement curviligne, on utilise la lettre « s » pour désigner la position d'un mobile sur le cercle à l'instant t. C'est ce qu'on appelle l'**abscisse curviligne**.

Au niveau de la vitesse, comme celle-ci s'écrit par le rapport de l'espace parcouru sur le temps, on a dans le cas présent :

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Dans le cas d'une révolution complète, $\Delta s = 2\pi R$ et $\Delta t = T \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T}$

__Exemples de MCU et exercices__ :

1) Quelle est la vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil ?
   Données : distance Terre-Soleil = $1{,}5 \cdot 10^8$ km
   révolution en un an

   Résolution : $T = 1 \text{ an} = 1 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s

   $$\Delta s = 2\pi r = 2\pi d_{TS} = 2 \times \pi \times 1{,}5 \cdot 10^8 = 9{,}42 \cdot 10^8 \text{ km}$$

   $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{9{,}42 \cdot 10^8}{3{,}15 \cdot 10^7} = 30 \text{ km/s}$$

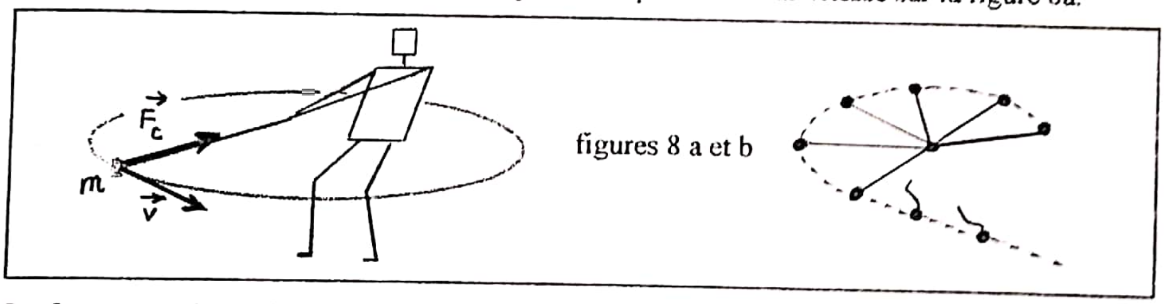
2) La pierre fronde (figure 8)

Force centripète

Pour illustrer la force centripète, reprenons l'exemple de la pierre fronde (figure 8a). Celle-ci est constituée tout simplement d'un objet placé au bout d'une corde que l'on fait tourner avec une vitesse constante en intensité. Tant que l'objet tourne, celui-ci ne s'en va pas. Il y a donc une force qui le retient par l'intermédiaire de la corde (figure 8a). Il est facile de voir que cette force est dirigée vers le centre, car s'il en était autrement, par exemple vers l'extérieur, la pierre s'en irait.

__Que se passe-t-il si on lâche la corde ?__

Si on lâche la corde, l'objet va partir en ligne droite (figure 8b). Ce résultat n'est rien d'autre que l'application du principe d'inertie. En effet, pendant que l'objet est retenu par la ficelle, on exerce tout au long une force sur lui puisqu'on le retient. Au moment où on lâche la corde, il n'y a plus de force et en vertu du principe d'inertie, l'objet va vouloir garder son mouvement rectiligne uniforme et va donc partir en ligne droite (tangentiellement au rayon du cercle) ; c'est cette ligne droite qui est représentée par le vecteur vitesse sur la figure 8a.



figures 8 a et b

La force exercée sur l'objet lorsqu'on le fait tourner est dirigée vers l'axe de rotation, c'est-à-dire vers le centre, d'où l'appellation de **force centripète** ($\vec{F}_c$). C'est la résultante de la force et du vecteur vitesse à tout instant qui donne ce mouvement circulaire uniforme (figure 9) !

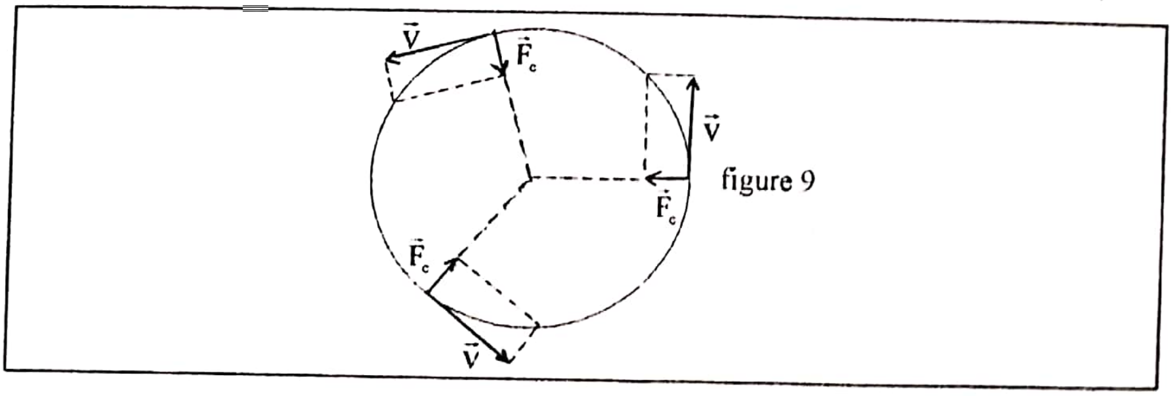


figure 9

Accélération centripète

D'après la seconde loi de Newton, la force peut s'écrire comme le produit de la masse et de l'accélération :

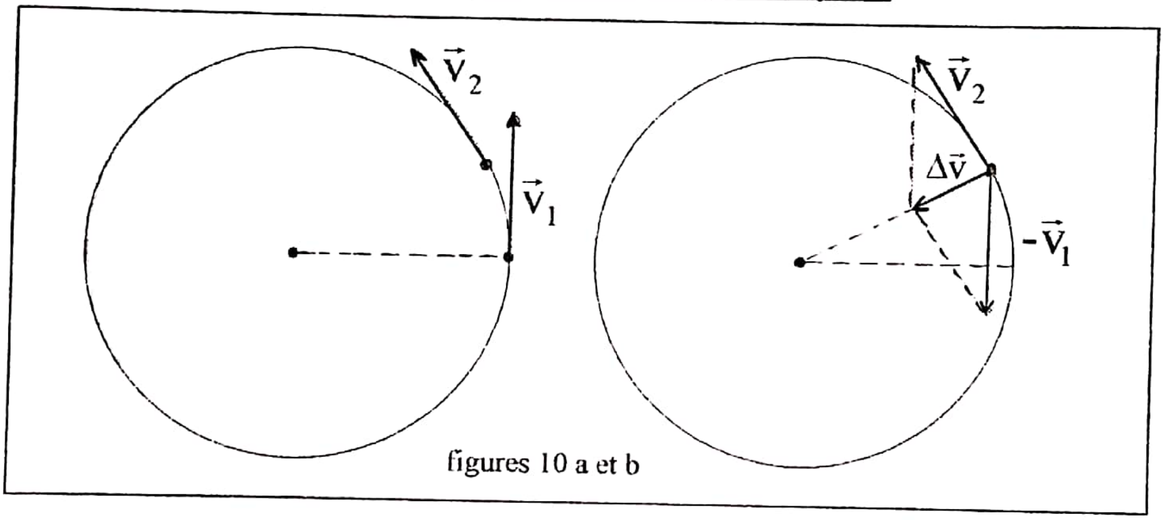
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La force étant centripète, cela nous amène à penser que l'accélération est aussi centripète. La présence d'une accélération peut paraître surprenante puisque la vitesse est constante. En réalité, le vecteur vitesse n'est pas constant, car si l'intensité de la vitesse est bien constante, la direction du vecteur vitesse, elle, change continuellement étant donné le MCU.

Par analogie avec les mouvements rectilignes, nous définissons l'accélération vectorielle comme :

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Comment peut-on se convaincre que l'accélération est bien centripète ?



figures 10 a et b

Le changement de vitesse $\Delta\vec{v}$ peut être caractérisé en fixant le vecteur vitesse à deux instants successifs (figure 10a) et $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Pour soustraire $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$, on peut inverser le sens de $\vec{v}_1$ (figure 10b).

Le changement du vecteur vitesse $\Delta\vec{v}$ s'obtient par $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$. On voit sur la figure 10b que $\Delta\vec{v}$ est dirigé vers le centre et par conséquent l'accélération est aussi centripète.

Intensité de la force centripète

Afin d'analyser les différents paramètres qui influencent l'intensité de la force centripète, essayons de réfléchir à une situation bien connue, à savoir prendre un virage en voiture. Pour un mobile ayant une masse m, on sait déjà par Newton que la force, d'une manière générale, s'écrit F = ma. Or, dans le cas d'un mouvement circulaire, l'intensité de la vitesse étant constante, il serait intéressant d'exprimer l'accélération centripète en fonction de cette vitesse.

Pour ce faire, proposons-nous de nous intéresser à une voiture sur un circuit automobile circulaire. Par expérience, on sait que lorsqu'on prend un virage à une certaine vitesse, on se sent bouger de son siège vers la gauche ou vers la droite à cause du principe d'inertie (c'est d'ailleurs ce qu'on appelle communément la **force centrifuge**, par opposition et par réaction à la force centripète, mais en réalité elle n'existe pas : ce n'est qu'un effet de l'inertie).

__Que se passe-t-il si la vitesse est plus importante ?__

Cependant, si on roule plus vite, on se sentira partir de son siège plus intensément que précédemment, c'est donc que la « force » qui nous arrache du siège est plus importante. Donc la force (et par conséquent l'accélération) augmente si la vitesse augmente.

- ***Premier résultat*** :

a ↗ si v ↗ ⇨ « a » est proportionnel à « v »

__Que se passe-t-il si le rayon du cercle augmente ?__

On peut retrouver intuitivement, et également par analogie avec la voiture, que pour une même vitesse, plus le virage est serré (c-à-d plus le rayon est petit), plus on se sentira arracher de son siège. Et de même, plus la voiture risque de quitter la route (figure 12).

A l'inverse, dans le cas extrême où le rayon du cercle est infiniment grand, ce qui équivaut à une droite, on ne se sent pas bouger de son siège, donc la force est beaucoup plus petite dans ce cas, voire nulle ! Autrement dit, plus le rayon est grand, plus la force (et par conséquent l'accélération) est faible et inversement.

- ***Deuxième résultat*** :

a ↗ si R ↘ ⇨ « a » est inversement proportionnel à « R »

En résumé, en tenant compte de ces résultats, on serait tenter d'écrire l'accélération comme :

$$a = \frac{v}{R}$$

Cependant, une simple analyse dimensionnelle nous montre que ce n'est pas possible ! En effet, l'accélération s'exprime en m/s^2, alors que le rapport v/R, lui, s'exprime en s^{-1}.

$$[a] = \frac{m}{s^2} \neq \frac{[v]}{[R]} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{s}$$

__Que faudrait-il faire pour retrouver les unités d'une accélération ?__

Le rapport v/R s'exprimant en s^{-1} (= 1/s), pour retrouver les unités d'une accélération (m/s^2), il faudrait multiplier ce rapport par des m/s, ce qui correspond à multiplier par une vitesse.

Au final, on a donc : $$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

Analyse dimensionnelle : $$[a] = \frac{[v^2]}{[R]} = \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{m}{s^2} \qquad \text{OK}$$

L'intensité de la force centripète s'écrit par conséquent :

$$\boxed{F = ma = m\frac{v^2}{R}}$$

Sécurité des véhicules dans les virages

Lorsqu'un véhicule aborde un virage, il est souvent recommandé de diminuer sa vitesse au risque de voir le véhicule quitter la route si l'adhérence des pneus n'est pas suffisante. Le but de cette section est précisément d'étudier les facteurs susceptibles d'influencer l'adhérence des pneus, c'est-à-dire en fin de compte les forces de frottements. Pour ce faire, nous distinguerons les comportements d'un véhicule dans deux types différents de virage :

1°) les virages non relevés (= plats) ;
2°) les virages relevés (= inclinés).

Les virages non relevés

Lorsqu'une voiture aborde un virage non incliné à vitesse constante, nous pouvons assimiler le mouvement de rotation à une portion de mouvement circulaire uniforme. En vertu de ce qui a été vu précédemment, la voiture est soumise à une force centripète.

Quelle est l'origine de cette force centripète ?

Si nous représentons les forces agissant sur la voiture, nous avons :

- la force de pesanteur $\vec{F}_p$;
- la force de résistance de la route sur les roues du véhicule. Cette force $\vec{F}_R$ est perpendiculaire à la route et est la résultante des quatre forces de résistance agissant sur chacune des roues ;
- la force de frottements totale $\vec{F}_{fr}$ créée par le contact des quatre roues sur la surface de la route !

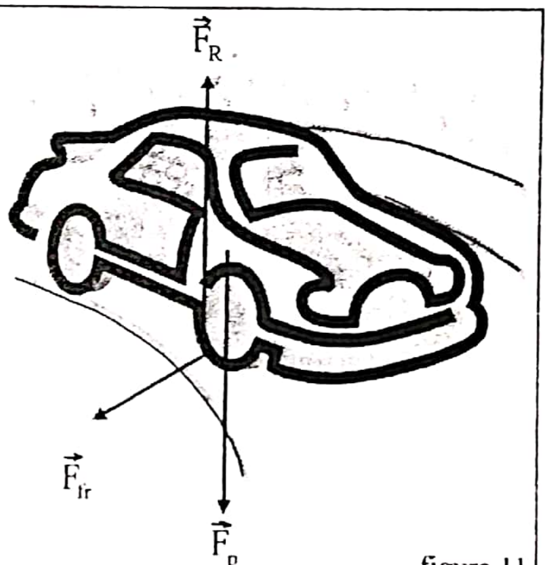


figure 11

La force de résistance $\vec{F}_R$ est la réaction à la force de pesanteur $\vec{F}_p$. Elle est de même intensité mais de sens opposé, de telle sorte que la résultante des deux est nulle. Ces deux forces verticales ne peuvent donc contribuer à la présence d'une force centripète.

La seule force, dirigée vers l'intérieur et responsable du virage du véhicule, est par conséquent la force de frottement. Mais encore faut-il que celle-ci soit suffisante pour que la voiture adhère bien à la route et ne la quitte pas précipitamment !

L'adhérence des pneus dépend non seulement du revêtement de la route (l'adhérence n'est pas la même sur route sèche, mouillée ou verglacée) mais elle dépend aussi de l'état d'usure des pneus (les pneus lisses ou usés adhèrent beaucoup moins que des pneus striés ou neufs). En cas de verglas, les risques de glissement sont importants, raison pour laquelle on répand du sel sur les routes (afin de modifier la texture du sol) et que l'on conseille de mettre des pneus « neige » ou de placer des chaînes.

Intéressons-nous plus en détail à l'expression de cette force de frottement. En 4ème année, nous avons vu que la force de frottement s'écrit :

$$\mathbf{F_{fr} = \mu.mg}$$

où : - « μ » désigne le coefficient d'adhérence entre la route et les pneus (par ex : 0,8) et
- « mg » représente le poids du véhicule.

Si la voiture décrit un MCU, la force de frottement engendre la force centripète et nous pouvons écrire en égalant les relations (9.1) et (9.2) :

$$\boxed{F_{fr} = m\cdot\frac{v^2}{R}}$$

$$\mu\cdot mg = m\cdot\frac{v^2}{R}$$

et : $$v^2 = \mu.g.R$$

La vitesse maximale avec laquelle le véhicule peut aborder le virage dépend donc du coefficient d'adhérence mais aussi du rayon de la trajectoire circulaire. Si le coefficient d'adhérence est plus faible (par exemple 0,1 sur du verglas), alors la vitesse doit être adaptée en fonction, c'est-à-dire doit être plus faible, ce qui est bien en accord avec la réalité observée.

Remarque :

Si la vitesse du véhicule dans le virage est trop élevée, l'intensité de la force de frottement n'est plus suffisante pour maintenir le véhicule et celui-ci part suivant une courbe de rayon plus grand que celui de la route (figure 11).

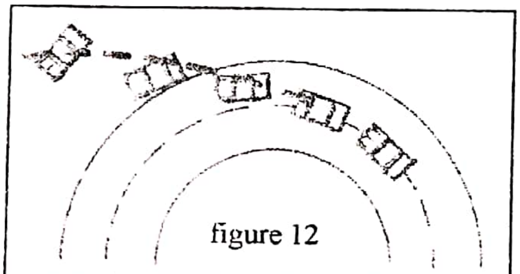


figure 12

Les virages relevés

Certains virages présentent une petite inclinaison (angle θ). C'est le cas notamment sur les pistes de compétition cycliste, sur les parcours de bobsleigh, ou encore sur les circuits automobiles tel que le circuit d'Indianapolis aux Etats-Unis. Le relèvement de ces virages facilité la trajectoire car il offre une meilleure adhérence.

En effet, on peut négocier un virage relevé même si les frottements sont très faibles, ce qui est le cas sur les pistes de bobsleigh illustré sur la figure ci-contre.

La raison en est simple : le virage étant relevé, la force de résistance F_R, qui doit être perpendiculaire à la surface, n'a plus la même direction que la force de pesanteur F_p. Ces deux forces ne se compensent plus mais leur résultante est toutefois dirigée vers le centre, produisant ainsi une force centripète. C'est précisément cette force centripète qui permet de maintenir l'athlète (ou le véhicule) sur la piste même en l'absence de frottements.

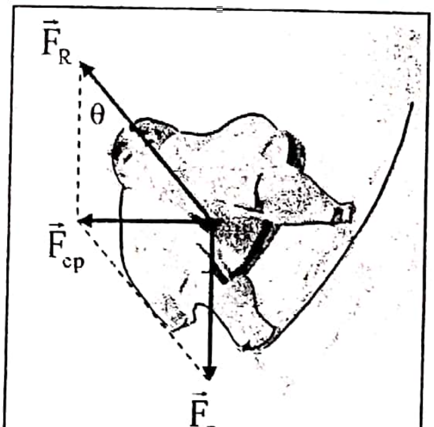


figure 13

Dans le cas d'un virage relevé, l'expression de la vitesse s'écrit :

$$\boxed{v^2 = \mu.g.R = \tan\theta.g.R}$$

Exercices (MCU) :

1. Démontrer que l'intensité de la force centripète peut également s'exprimer comme :

$$F = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

2. Une automobile de 1400 kg tourne autour d'un rond-point dont le rayon de courbure est de 24 m à une vitesse de 60 km/h. Calculer l'accélération de ce mouvement et la force centripète nécessaire.

3. Si l'on applique une force de 100 N à un corps de 200 g pour qu'il se mette à tourner de manière uniforme, quelle sera sa vitesse si la distance parcourue pendant une révolution complète est de 150 cm ?

4. Un avion de combat piquant à la vitesse de 290 m/s fait un looping de rayon R. Supposant que l'avion est conçu pour résister à des forces associées à des accélérations de 9,0 g, calculer la valeur minimum de R.

5. Si la Lune est attirée par la Terre avec une force centripète de 2.10^{20} N, sachant que la masse du satellite de notre planète est de $7{,}35.10^{22}$ kg et que la période de révolution est de 27,8 jours, déterminer la distance entre la Terre et la Lune et la vitesse orbitale de cette dernière. Comparer cette valeur avec celle de la Terre (v_T = 30 km/s).

6. Le bras de la nouvelle attraction de la foire de Liège (« L'Eclipse ») possède une longueur (rayon) de 24 m. Sachant que la vitesse maximale de rotation est de 32,9 m/s, quelle est l'accélération ressentie. Exprimer également cette quantité en « G », sachant que 1G = 9,81 m/s². Quelle est la force centripète ressentie si une personne de 75 kg va sur l'attraction.

7. Supposons que vous faites tourner un seau plein d'eau sur un cercle dans un plan vertical, que votre bras a 90 cm de longueur (de l'épaule au poing) et que la distance de la poignée à la surface de l'eau est de 20 cm. Quelle doit être la vitesse minimum pour ne pas verser l'eau ?

Exercices (Sécurité des véhicules dans les virages) :

8. Soit une automobile de 900 kg, dont la force d'adhérence des pneus s'élève au maximum à 7 000 N.
   a) L'adhérence des pneus est-elle suffisante pour prendre un virage de 30 m de rayon à une vitesse de 10 m/s ?
   b) Cette même automobile peut-elle envisager, sans danger :
      - d'effectuer un virage à même vitesse mais de rayon deux fois plus court ?
      - d'effectuer le virage décrit en (a), chargée de passagers et de bagages qui doublent sa masse ?
      - d'effectuer ce même virage à une vitesse deux fois plus élevée ?

9. Si la force d'adhérence des pneus est légèrement inférieure à la force centripète requise pour effectuer le virage, que se passe-t-il ? Sélectionner la réponse correcte parmi les suivantes :
   a) L'auto quitte la trajectoire en ligne droite par la tangente ;
   b) L'auto vire avec un rayon de courbure plus grand ;
   c) L'auto vire avec un rayon de courbure plus petit.

10. Une piste circulaire de 20 m de rayon doit être relevé d'un angle θ en vue d'accueillir sans risque des engins de course pouvant atteindre la vitesse de 24 km/h. Calculer l'angle θ.

Vitesse et accélération angulaire

Travail de réflexion personnelle

Un tourne-disque dont la platine a un rayon de 15 cm tourne suivant la « vitesse » de 45 tours par minute. A réaliser à domicile.

a) Comment peut-on qualifier la trajectoire d'un point situé sur la périphérie de la platine ?

b) Si la période (T) de ce mouvement est définie comme étant la durée d'une révolution complète, rechercher la valeur de cette période (en seconde).

c) Rechercher également la distance parcourue en une période par un point situé à la périphérie de la platine.

d) Rechercher toutes les caractéristiques de la vitesse de ce point (intensité, sens, direction).

e) Représenter sur la circonférence les vitesses instantanées aux temps valant T/4 ; T/2 ; 3T/4 et T.

f) Comment peut-on qualifier ce mouvement ?

g) Si on définit le radian comme l'angle compris entre deux rayons d'une circonférence et interceptant sur celle-ci un arc de cercle équivalant à la valeur du rayon, on demande de schématiser un radian.

h) Combien de radian(s) y a-t-il dans une révolution complète ? Ecrire le calcul effectué !

i) Si on définit la vitesse angulaire comme étant la valeur (en radian) de l'angle balayé en une seconde, rechercher la vitesse angulaire de cette platine (en rad/s).

j) Quelle relation (formule mathématique) peux-tu trouver qui permettrait de relier la vitesse physique (en m/s) à la vitesse angulaire ?

k) En partant de la formule de l'accélération centripète $a = v^2/R$ et de la relation obtenue au point (j), on demande de déterminer l'expression de l'accélération centripète en fonction de la vitesse angulaire.

l) Donner l'expression de la force centripète en fonction de la vitesse angulaire.

Définition du radian

En regard à l'exercice de la page précédente intitulé : « Question de réflexion personnelle », la question (g) nous renseigne quant à la définition du radian.

> Le **radian** correspond à l'angle compris entre deux rayons d'une circonférence et interceptant sur celle-ci un arc de cercle équivalent à la valeur du rayon (figures 12a,b).
>
> $$\theta = \frac{\text{longueur d'un arc de cercle égal au rayon}}{\text{Rayon}} = \frac{\ell}{R} = \frac{R}{R} = 1 \text{ rad}$$

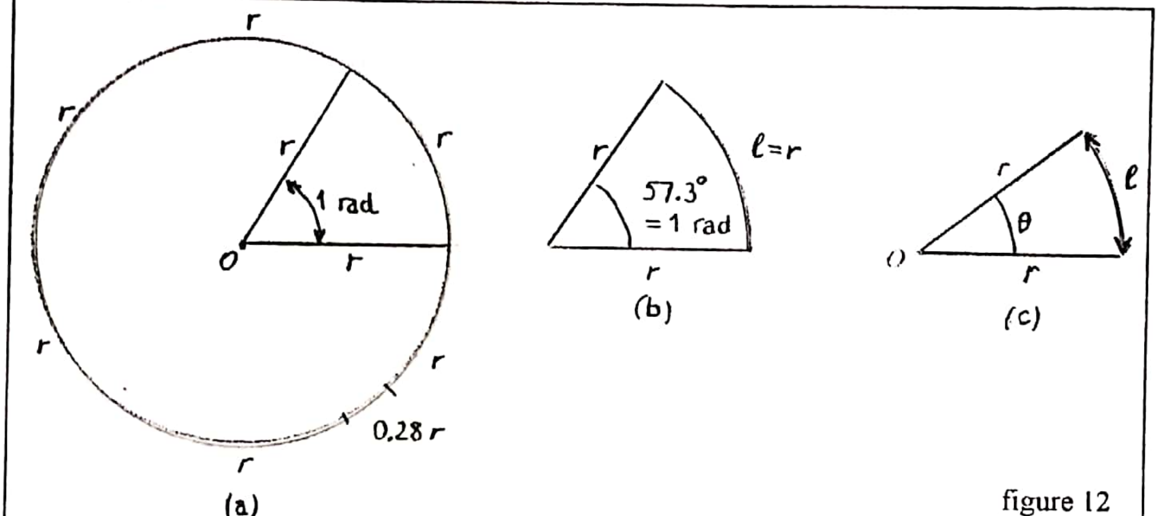


figure 12

En général, pour un arc de cercle quelconque, l'angle est donné par la relation (figure 12c) :

$$\boxed{\theta = \frac{\ell}{R} \quad \Rightarrow \quad \ell = \theta R}$$

Sachant que la circonférence d'un cercle est égale à $2\pi R$ et que le radian correspond à un angle θ dont l'arc de cercle formé par celui-ci est de longueur R, on peut en conclure qu'une révolution complète (360°) contient :

$$\frac{2\,\pi\,R}{R} = 2\pi \text{ rad} = 6{,}283 \text{ rad} \cong 360°$$

Remarques :

Ces deux relations permettent de montrer deux choses :

- d'une part, si 2π rad = 360°, alors $1 \text{ rad} = \dfrac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$ (figure 12b) ;
- d'autre part, l'angle θ (en rad) est déterminé comme le rapport entre la longueur d'un arc de cercle (en m) sur le rayon du cercle (en m). L'unité « rad » n'est donc pas une unité physique (tout comme le degré « ° ») puisqu'il s'agit d'un rapport de deux distances ! Un angle est donc en réalité un nombre sans unité, ce qu'on écrit : $[\theta] = 1$!

Vitesse angulaire moyenne

Définition :

La vitesse angulaire moyenne (ω) correspond à l'angle balayé par unité de temps.
Elle s'exprime en rad/s et est donnée par la relation :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Si la vitesse angulaire s'exprime en rad/s, les expressions suivantes sont d'usage courant : degrés/s, tours/min,…

Attention cependant, la relation ci-dessus n'est valable que si la vitesse est exprimée en rad/s !

En réalité, comme le radian n'est pas une unité physique, l'unité réelle de ω est « s^{-1} », car :

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Il ne s'agit donc pas d'une vitesse au sens réel du terme, puisqu'une vitesse s'exprime en m/s !

D'après la relation l = rq, en divisant les deux membres de cette expression par le temps, on obtient :

$$\ell = R\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = R\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = R\omega}$$

On peut se convaincre que cette expression est bien correcte en vérifiant les unités, à savoir : $[v] = [R].[\omega] = m.s^{-1} = m/s$, ce qui correspond bien à l'unité d'une vitesse.

Accélération centripète

Au cours de ce chapitre (§ 3.5), nous avons montré que l'accélération était donnée par la relation : $a = v^2/R$.

En substituant dans cette relation la vitesse par l'expression que l'on vient de déterminer à l'instant ($v = \omega R$), on obtient :

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cp} = \omega^2 R}$$

Force centripète

Par la seconde loi de Newton F = ma, on obtient finalement l'expression de la force centripète en fonction de la vitesse angulaire, à savoir :

$$\boxed{F = m\,a = m\frac{v^2}{R} = m\,\omega^2 R}$$

Exercices :

1. A la foire à Liège, certains ont pu tester l'attraction foraine : « Le Rotor ». Si le rayon ~~dy~~ du cylindre est de 2 m :
   a. Déterminer le nombre de tours par seconde que celui-ci doit effectuer au minimum pour que l'on reste plaqué contre la paroi au moment où le sol se dérobe (on néglige les frottements contre la paroi).
   b. Si l'accélération ressentie est en réalité de 4 g, calculer le nombre tours que le rotor effectue par seconde.
2. Au centre d'entraînement de Baïkonour (Kazakhstan), des astronautes s'entraînent dans une centrifugeuse pour tester leurs aptitudes physiques à résister à l'accélération énorme ayant lieu du décollage d'une fusée. Si la centrifugeuse possède un bras de 4 m et effectue 35 rotations à la minute, calculer l'accélération (en m/s^2 et en g) ressentie par l'astronaute.
3. On projette de construire une station spatiale en forme de mince tube circulaire tournant autour de son centre (comme une roue de bicyclette). Le diamètre du cercle ainsi formé doit mesurer 1 km. Quelle doit être sa vitesse de rotation (en tours/jour) pour obtenir un effet de gravitation semblable à celui qu'on ressent sur Terre (1 g) ?