Chapitre 2
Les probabilités

1. Mise en situation

Fille ou garçon ?

Pour prédire le sexe d'un enfant, certains utilisent un pendule, tirent les cartes… Mais que dit un annuaire statistique ?

Nombre de naissances par région et par sexe (1980 – 2005)

	1980	1990	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Belgique	**124794**	**123554**	**114883**	**114172**	**111225**	**112149**	**115618**	**118002**
Garçons	63917	63304	58790	58243	57044	57339	59429	60575
Filles	60877	60250	56093	55929	54181	54810	56189	57427
Bruxelles	**12520**	**12852**	**13626**	**14513**	**13929**	**14668**	**15173**	**15492**
Garçons	6384	6596	7038	7351	7078	7427	7799	7911
Filles	6136	6256	6588	7162	6851	7241	7374	7581
Flandres	**72491**	**69492**	**61877**	**60645**	**59725**	**59964**	**62374**	**63906**
Garçons	37248	35601	31572	31013	30683	30740	32061	32900
Filles	35243	33891	30305	29632	29042	29224	30313	31006
Wallonie	**39783**	**41210**	**39380**	**39014**	**37571**	**37517**	**38071**	**38604**
Garçons	20285	21107	20180	19879	19283	19172	19569	19764
Filles	19498	20103	19200	19135	18288	18345	18502	18840

Source : Direction générale Statistique et Information économique – Service Démographie

a. Si on tire au hasard le nom d'un enfant né en 2005 dans le registre de la population wallonne, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon ?
b. D'après ces statistiques, en 2005, la probabilité d'avoir un garçon est-elle la même dans les 3 régions ?

Synthèse

1.1. Comment déterminer une **probabilité expérimentale ou statistique ?**

Exemple 1

Si on lance un dé 150 fois et que l'on obtient 20 fois le « 2 », la probabilité expérimentale d'obtenir un « 2 » est

P = 20 / 150 = 0,13 = 13%

Exemple 2

Les statistiques pour la Belgique (voir tableau précédent) montrent que sur 934397 naissances, il y a eu 455756 filles. La probabilité qu'un enfant attendu soit une fille est :

P (avoir une fille) = 455756 / 934397 = 0,49 = 49%

D'où la probabilité d'avoir un garçon est :

P (avoir un garçon) = 1 – 0,49 = 0,51 = 51%

Si lors de « n » épreuves, un événement s'est produit « r » fois, alors la probabilité expérimentale est le rapport :

$$\boldsymbol{Probabilit\text{é}\ P(A) = \frac{r}{n}}$$

1.2. Comment déterminer **une probabilité « a priori »** ?

Exemple 3

Lorsqu'on lance un dé bien équilibré et que l'on fait l'hypothèse que toutes les faces ont la même « chance » d'apparaître, on peut déterminer la probabilité d'avoir, par exemple, un multiple de 3 sans faire d'expérience. On procède comme ceci : l'ensemble des événements favorables est {3 ; 6}, il contient 2 éléments. L'ensemble des événements possibles est {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}, il contient 6 éléments. La probabilité d'avoir un multiple de 3 est :

P (avoir un multiple de 3) = 2 / 6 = 0,33 = 33%

Exemple 4

Lorsqu'on tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. La probabilité d'avoir une image est :

P (avoir une image) = 12 / 52 = 0,23 = 23%

Lorsque les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité a priori est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles. On écrit la formule :

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

La probabilité d'un événement A, notée P(A) est un nombre compris entre 0 et 1.

$$0 \leq \boldsymbol{P(A) \leq 1}$$

1.3. Comment déterminer la **probabilité d'événements composés** ?

<u>1er cas</u> : Evénements indépendants et équiprobables :

A. *<u>Déterminer la probabilité d'avoir 3 fois « pile » en lançant 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée</u>.*

On peut modéliser la situation par **<u>un diagramme en arbre</u>** :

Lorsqu' on lance 3 fois une pièce de monnaie, il y a **<u>8 résultats possibles</u>**.

Un seul cas est « favorable » : PPP. **La probabilité est donc 1/8**.

On peut calculer la probabilité de l'événement composé « PPP » en multipliant entre elles les probabilités de chacun des événements « Pile ». On a :

$$\boldsymbol{P\,(PPP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

B. *Déterminer la probabilité d'avoir au-moins une fois « face ».*

L'ensemble des cas favorables est $\{PPF\,;PFP\,;PFF\,;FPP\,;FPF\,;FFP\,;|FFF\}$. La probabilité est donc 7/8.

On peut calculer cette probabilité en additionnant les probabilités des événements composés qui apparaissent au bout des dernières branches. On a :

$$\boldsymbol{P\,(au\ moins\ une\ fois\ F) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}}$$

La probabilité d'avoir « au moins une fois face » est la même que celle de « ne pas avoir 3 fois pile ».

On a donc :

$$\boldsymbol{P\,(ne\ pas\ avoir\ 3\ fois\ pile) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}}$$

Dans un arbre, chaque événement composé apparaît « au bout » de la dernière. On calcule la probabilité de cet événement en multipliant entre elles les probabilités des événements qui figurent sur les branches intermédiaires.

2ème cas : Evénements **indépendants et non équiprobables :**

Si on se demande la probabilité pour une famille de 2 enfants (en Belgique) d'avoir 2 filles ; 2 garçons ; d'abord un garçon puis une fille ; on construit un « arbre ». On porte sur chaque branche les possibilités correspondantes :

Les extrémités de l'arbre sont des événements composés. On calcule leur probabilité en effectuant le produit des probabilités de chaque branche intermédiaire.

On trouve ainsi que la probabilité d'avoir :

<u>3ème cas</u> : Evénements **dépendants et non équiprobables.**

Dans une classe de physique qui comporte 13 garçons et 9 filles, le professeur tire au sort 2 élèves qui devront ranger le laboratoire. Il écrit le nom de chaque élève sur un carton, il place les cartons dans une boîte et tire 2 noms l'un après l'autre.

Quelle est la probabilité que sur les deux cartons tirés figurent des noms de filles ?

Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux cartons tirés porte un nom de fille ?

Quand on tire un second nom, la probabilité de tirer un nom de fille n'est plus la même. Le nombre de cas possible a changé et le nombre de cas favorables aussi.

Les extrémités de l'arbre sont des événements composés. On calcule leur probabilité en effectuant **le produit des probabilités de chaque branche intermédiaire**.

On trouve ainsi que la probabilité d'avoir :

- 2 noms de filles est :

- au moins un nom de fille est :

1.4. Comment déterminer une **probabilité conditionnelle** ?

Exemple :
Dans une grande ville, on a constitué un fichier qui reprend pour chaque voiture sa date de mise en circulation et sa provenance. Ces données sont résumées dans le tableau ci-après.

	Voiture fabriquée en Europe	Voiture fabriquée hors Europe	
Voiture neuve	186	42	
Voiture d'occasion	128	250	

a) Si on prend une fiche au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse :

- D'une voiture d'occasion ?

....

- D'une voiture fabriquée en Europe ?

....

- D'une voiture d'occasion fabriquée en Europe ?

....

b) On a tiré une voiture fabriquée en Europe. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une voiture d'occasion ?

....

c) On a tiré une voiture d'occasion. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une voiture fabriquée en Europe ?

....

Pour répondre à de telles questions, on prolonge le tableau donné en calculant les sommes de chaque ligne et de chaque colonne.

	A. Voiture fabriquée en Europe	D. Voiture fabriquée hors Europe	**Totaux**
B. Voiture d'occasion	128	250	**378**
C. Voiture neuves	186	42	**228**
Totaux	**314**	**292**	**606**

P (B) =...

P (A) =...

P (B et A) = ...

P (B si A) = ...

P (A si B) = ...

Mes 2 dernières probabilités sont appelées « probabilités conditionnelles ».
Observons que :

$$P(B\ si\ A) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\frac{\quad}{\quad}}{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{P(\quad et \quad)}{P(\quad)}$$

$$\boxed{On\ retiendra\ la\ formule :\ \ P(B\ si\ A) = \frac{P(\quad et \quad)}{P(\quad)}}$$

2. <u>Applications</u> :

2.1. Tirer les cartes.

A. D'un jeu de 52 cartes bien mélangées, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de :
   - Tirer un as ?
   - Tirer une image ?
   - Tirer une carte dont le chiffre est inférieur à 5 ?

B. Un paquet de 7 cartes comprend le 3, le 4, le 5 et le 6 de cœur ainsi que le 3, le 4, et le 6 de trèfle. Après avoir battu le paquet, on tire une carte et on note sa couleur et son chiffre. On replace la carte dans le paquet. On tire alors une deuxième carte et note son chiffre et sa couleur.

   - Quelle est la probabilité de tirer deux cartes de couleurs différentes ?
   - Quelle est la probabilité que la première soit un trèfle et la seconde un cœur ?
   - Sachant que la première est un cœur, quelle est la probabilité que la seconde soit un trèfle ?

2.2. Lancer un dé

A. On lance un dé à 6 faces, non truqué. Calculer la probabilité des événements suivants.
- Obtenir un 2.
- Obtenir un nombre impair.
- Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3.
- Obtenir un nombre au moins égal à 4.
- Le résultat est un multiple de 3 et de 4.

2.3. Lancer deux dés

On lance deux dés bien équilibrés et on considère la somme des résultats obtenus. Quelle est la probabilité des événements suivants ?
- La somme des résultats est 7.
- La somme des résultats est inférieure ou égale à 6.
- La somme des résultats est 7 ou 11.

2.4. Dés truqués

A. Un dé est truqué de telle sorte que la probabilité pour que « 1 » apparaisse est de 1/3 tandis que les autres événements élémentaires sont équiprobables. On jette le dé une seule fois. Calculer la probabilité d'obtenir :
- Un « deux ».
- Un chiffre différent de « deux ».
- Un chiffre pair.
- Un chiffre impair.

B. On truque un dé de telle sorte que les chiffres pairs aient tous des chances égales d'apparaître et les chiffres impairs aient également tous des chances égales d'apparaître. Mais on s'arrange pour que chaque nombre pair ait deux fois plus de chances d'apparaître que n'importe quel nombre impair. Calculer la probabilité d'obtenir
- Un chiffre pair.
- Un chiffre impair.

2.5. Location de logements pour les vacances

Un sondage sur les pratiques en matière de location de logements pour les vacances a donné les résultats suivants :

Location :	Directement au propriétaire	Par agence	
A la mer	52	64	
Dans les Ardennes	36	25	
A l'étranger	12	11	

On tire au hasard un contrat de location d'une des personnes interrogées. Quelle est la probabilité que ce soit le contrat d'une personne qui a loué

- À l'étranger ?
- Par agence et à l'étranger ?
- À l'étranger, si on sait qu'elle a loué par agence ?
- Par agence, si on sait qu'elle a loué à l'étranger ?

2.6. Réussite

Dans une école de **600 élèves**, 79% des élèves réussissent en français, 84% réussissent en anglais et 70% réussissent dans les deux cours.

	Réussite en français	Echec en français	Totaux
Réussite en anglais			504
Echec en anglais			
Totaux	474		600

- Compléter le tableau
- On choisit un élève au hasard :
  - ✓ Sachant qu'il a raté en anglais, quelle est la probabilité qu'il réussisse en français ?
  - ✓ Sachant qu'il a raté en français, quelle est la probabilité qu'il rate aussi en anglais ?

2.7. Tirage

Un sac contient trois boules rouges, quatre boules vertes et sept boules blanches. On tire une première boule.

- Quelle est la probabilité qu'elle soit verte ?
- Quelle est la probabilité qu'elle ait une autre couleur ?
- Après avoir remis la première boule dans le sac, on en tire une seconde. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une verte puis une rouge ?
- On tire une seconde boule sans remettre la première. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une verte puis une rouge ?

2.8. La météo

D'après la météo, la probabilité qu'aujourd'hui soit une belle journée ensoleillée est 1/3. S'il fait beau aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est 1/2. S'il pleut aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est 2/3.
Après avoir dessiné un diagramme en arbre, trouver la probabilité d'avoir :

- Deux jours de pluie.
- Deux belles journées.
- Un seul jour de pluie.

2.9. Stylos à bille défectueux

Une caisse de **144 stylos à bille contient 5 pièces défectueuses**.

- Si on en achète un au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
- Si le premier stylo acheté est défectueux, et qu'une deuxième personne achète un stylo prélevé dans la même caisse, quelle est la probabilité que ce stylo soit défectueux ?
- Quelle est la probabilité que deux stylos achetés successivement fonctionnent bien ?